$g(x)=\cos(3x)\cos^2(x)$

● $x \in IR, x+2\pi \in IR$ et

$g(x+2\pi)=\cos(3(x+2\pi))\cos^2(x+2\pi)$

$=\cos(3x+3\times 2\pi)\cos x=\cos 3x\cos^2 x=f(x)$

Donc g est périodique de période $T=2\pi$

Aussi on a :

$x \in IR, -x \in IR$ et

$g(-x)=\cos(3(-x))\cos^2(-x)=\cos 3x\cos^2 x=g(x)$

Donc g est paire par suite on étudie f sur $[0,\pi]$

On construit C_g sur $[0,\pi]$ puis par symétrique par rapport à la droite des ordonnées on obtient le graphe de C_g sur $[-\pi,\pi]$ finalement on complète C_g par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$

- Etude des variations de g :

g est dérivable sur IR et on a :

$g'(x)=-3\sin 3x\cos^2 x-2\sin x.\cos x.\cos 3x$

Or on sait que : $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ (*voir cours nombre complexe partie linéarisation*)

Donc :

$g(x)=(4\cos^3 x-3\cos x).\cos^2 x=4\cos^5 x-3\cos^3 x$

$\Leftrightarrow$

$g'(x)=-20\sin x.\cos^4 x+9\sin x.\cos^2 x$

$=\sin x.\cos^2 x.(9-20\cos^2 x)$

Sur $[0,\pi]$ le signe de $g'(x)$ est celui de $9-20\cos^2 x$

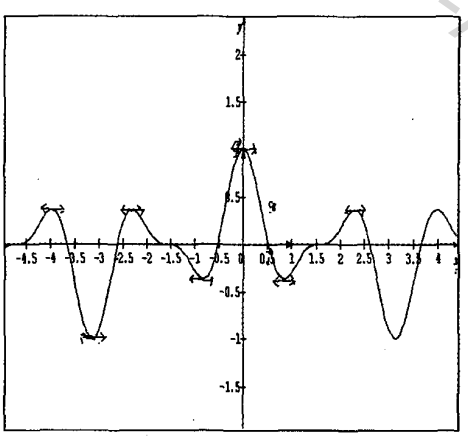
$9-20\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{9}{20} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$

En utilisant une calculatrice on trouve :

$x\approx 48^\circ \approx \frac{4\pi}{5}$ | $x\approx 132^\circ \approx \frac{11\pi}{5}$

x	0		$\frac{4\pi}{15}$		$\frac{11\pi}{15}$		π
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	1	↘	(−0.35)	↗	0.35	↘	−1

Courbe de la fonction g :



Exercice n° 25

● a) $x \in$ IR , g dérivable car $x^2+1>0$

$g'(x)=0+\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \quad g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in IR$

b) $\quad g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x \in IR$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$	+		
$g(x)$	0	↗	2

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (0)

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (0)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1+1=2$

On a : $g(IR)=]0.2[\Rightarrow g(x)>0$

●a) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$

$x \in IR, f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)>0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x).(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=-1+\frac{1}{+\infty}=-1$

Oarray.tn - Aqra Bleen - Oarray.tn